Introduction au WEB Sémantique
Introduction aux logiques de description

Odile PAPINI

POLYTECH MARSEILLE. AIX MARSEILLE UNIVERSITE

odile.papini@univ-amu.fr

https://amubox.univ-amu.fr/s/jDtLY9Yj8YNaMNn

WORKSHOP SPARQL : être connecté à wikidata
Universit de Sfax 25-27 juin 2019

Plan du cours

1. Introduction
2. logique $\mathcal{AL}$: logique de description de base
   - Langage
   - sémantique
3. Famille des logiques de descriptions
4. Logiques de description : langage des ontologies
5. Raisonnement en logique de description
6. Complexité du raisonnement

Bibliographie I

Supports de cours :
F. Baader, F. Calvanese & al
The Description Logic Handbook : Theory, Implementation and Applications. Cambridge university press. 2002

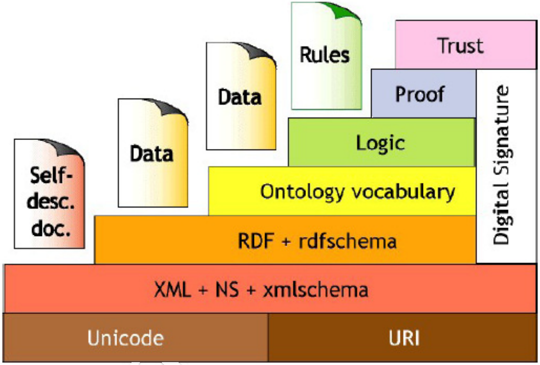
Amedeo Napoli INRIA Nancy
Une introduction aux logiques de description Rapport INRIA 3314. 1997
http://hal.inria.fr/inria-00073375/en/

Bibliographie II

- Michel Gagnon
  Logiques descriptives et OWL
  http://www.cours.polymtl.ca/inf6410/Documents/logique_descriptiv
- Tutoriaux
  http://dl.kr.org/courses.html

Le Web sémantique : Approche par couches

Le web sémantique : structuration

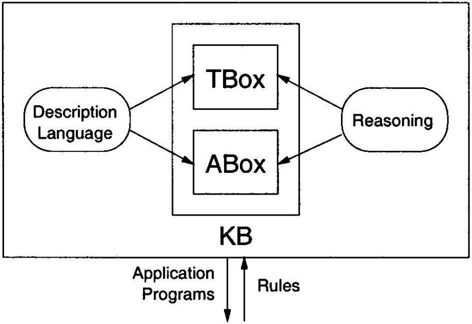


Le Web sémantique : Approche par couches

- couche Logique
  - évolution des langages pour les ontologies
  - applications spécifique pour des connaissances déclaratives
- couche Contrôle
  - génération de contrôles, validation
- couche Sécurisation
  - signatures numériques
  - recommandations, $\cdots$

TBox, ABox

F. Baader, W. Nutt



$\mathcal{A}L$: logique de description de base : langage

Vocabulaire

- Constantes : $\top$, $\bot$
- A, B, C, D; $\cdots$: concepts
- R : relations binaires (rôles)
- constructeurs : $\neg$, $\sqcap$, .
- quantificateurs : $\exists$, $\forall$

$\mathcal{AL}$: logique de description de base : langage

Procédé de formation des concepts

- $\top$: concept universel
- $\bot$: concept impossible
- A : concept atomique
- $\neg A$: négation d'un concept atomique
- $C \sqcap D$: intersection de concepts quelconques
- $\forall R.C$: restriction de valeurs pour des concepts quelconques
- $\exists R.\top$: quantification existentielle limitée

$\mathcal{AL}$: logique de description de base : langage

Procédé de formation des concepts : exemples

- concepts atomiques : $Personne$, $Homme$
- rôles atomique : $aEnfant$
- femme : $Personne \sqcap \neg Homme$
- personnes qui ont au moins un enfant : $Personne \sqcap \exists aEnfant.\top$
- personnes dont tous les enfants sont des hommes : $Personne \sqcap \exists aEnfant.\top \sqcap \forall aEnfant.Homme$
- personne qui n'a pas d'enfant : $Personne \sqcap \forall aEnfant.\bot$

$\mathcal{AL}$: logique de description de base : Axiomes

Axiomes pour les *TBox*

- **Subsomption :** $C \sqsubseteq D$ avec C et D : concepts
- **Equivalence :** $C \equiv D$ avec C et D : concepts

Assertions pour les *ABox*

- $C(a)$ avec C : concept et a : individu
- $R(a, b)$ avec R : rôle, a, b : individus

Base de connaissances

$$BC = TBox \cup ABox$$

$\mathcal{AL}$: logique de description de base : langage

exemples

- concepts atomiques : *Personne*, *Homme*
- rôles atomique : *aEnfant*
- individus : anne, paul

axiomes :

- $Personne \sqsubseteq \top$ $\quad$ $Homme \sqsubseteq Personne$
- $Femme \equiv Personne \sqcap \neg Homme$

assertions :

- $Femme(anne)$
- $aEnfant(anne, paul)$

$\mathcal{AL}$: logique de description de base : langage

exemples : définition de concepts

- concepts atomiques : *Homme*
- rôles atomique : *aEnfant*, *marieAvec*

- *Femme* $\equiv$?
- *Mere* $\equiv$?
- *Parent* $\equiv$?
- *ParentDeFemme* $\equiv$?
- *Celibataire* $\equiv$?
- *HommeMarie* $\equiv$?

$\mathcal{AL}$: logique de description de base : langage

exemples : définition de concepts

- concepts atomiques : $Homme$
- rôles atomique : $aEnfant$, $marieAvec$

- $Femme \equiv \neg Homme$
- $Mere \equiv \neg Homme \sqcap \exists aEnfant.\top$
- $Parent \equiv \exists aEnfant.\top$
- $ParentDeFemme \equiv \exists aEnfant.T \sqcap \forall aEnfant.\neg Homme$
- $Celibataire \equiv \forall marieAvec.\bot$
- $HommeMarie \equiv Homme \sqcap \exists marieAvec.\top$

$\mathcal{AL}$: logique de description de base : sémantique

Interprétation

- $\mathcal{I}$ interprétation : $(\Delta^{\mathcal{I}}, f_{A^{\mathcal{I}}}, f_{R^{\mathcal{I}}})$
- $\Delta^{\mathcal{I}}$: domaine
- fonction $f_{A^{\mathcal{I}}}$: $A \rightarrow A^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}}$
- fonction $f_{R^{\mathcal{I}}}$: $R \rightarrow R^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}} \times \Delta^{\mathcal{I}}$

$\mathcal{AL}$: logique de description de base : sémantique

extension à la description de concepts

- $\top^{\mathcal{I}} = \Delta^{\mathcal{I}}$
- $\bot^{\mathcal{I}} = \emptyset$
- $(\neg A)^{\mathcal{I}} = \Delta^{\mathcal{I}} \backslash A^{\mathcal{I}}$
- $(C \sqcap D)^{\mathcal{I}} = C^{\mathcal{I}} \cap D^{\mathcal{I}}$
- $(\forall R.C)^{\mathcal{I}} = \{x \in \Delta^{\mathcal{I}} |\ \forall y,\ R(x,y) \in R^{\mathcal{I}} \rightarrow C(y) \in C^{\mathcal{I}}\}$
- $(\exists R.\top)^{\mathcal{I}} = \{x \in \Delta^{\mathcal{I}} |\ \exists y,\ R(x,y) \in R^{\mathcal{I}}\}$

$\mathcal{AL}$: logique de description de base : sémantique

exemple

Soit l'interprétation $\mathcal{I}$:

- $\Delta^{\mathcal{I}} = \{a, b, c, d, e, f, g\}$
- $Homme^{\mathcal{I}} = \{a, b, c, g\}$
- $aEnfant^{\mathcal{I}} = \{(a, c), (b, d), (b, e), (c, g)\}$
- $marieAvec^{\mathcal{I}} = \{(b, f), (f, b)\}$

Quelles sont les interprétations des concepts suivants :

- $Parent^{\mathcal{I}} = ?$
- $ParentDeFemme^{\mathcal{I}} = ?$
- $Celibataire^{\mathcal{I}} = ?$
- $HommeMarie^{\mathcal{I}} = ?$

$\mathcal{AL}$: logique de description de base : sémantique

exemple

Soit l'interprétation $\mathcal{I}$:

- $\Delta^{\mathcal{I}} = \{a, b, c, d, e, f, g\}$
- $Homme^{\mathcal{I}} = \{a, b, c, g\}$
- $aEnfant^{\mathcal{I}} = \{(a, c), (b, d), (b, e), (c, g)\}$
- $marieAvec^{\mathcal{I}} = \{(b, f), (f, b)\}$

Quelles sont les interprétations des concepts suivants :

- $Parent^{\mathcal{I}} = \{a, b, c\}$
- $ParentDeFemme^{\mathcal{I}} = \{b\}$
- $Celibataire^{\mathcal{I}} = \{a, c, d, e, g\}$
- $HommeMarie^{\mathcal{I}} = \{b\}$

$\mathcal{AL}$: logique de description de base : sémantique

sémantique des axiomes et assertions

- $\mathcal{I}$ satisfait $C \sqsubseteq D$ ssi $C^{\mathcal{I}} \subseteq D^{\mathcal{I}}$
- $\mathcal{I}$ satisfait $C \equiv D$ ssi $C^{\mathcal{I}} = D^{\mathcal{I}}$
- $\mathcal{I}$ satisfait $C(a)$ ssi $a^{\mathcal{I}} \in C^{\mathcal{I}}$
- $\mathcal{I}$ satisfait $R(a, b)$ ssi $(a^{\mathcal{I}}, b^{\mathcal{I}}) \in R^{\mathcal{I}}$

Les logiques de description de la famille $\mathcal{AL}$

Constructeur d'union $\mathcal{U}$

Union de concepts $\mathcal{ALU}$

syntaxe

$$C \sqcup D$$

sémantique

$$(C \sqcup D)^{\mathcal{I}} = C^{\mathcal{I}} \cup D^{\mathcal{I}}$$

exemple

- *Personne* $\equiv$ *Homme* $\sqcup$ *Femme*

Les logiques de description de la famille $\mathcal{AL}$

Constructeur de négation sans restriction $\mathcal{E}$

quantification existentielle complète

syntaxe

$$\exists R.C$$

sémantique

$$(\exists R.C)^{\mathcal{I}} = \{x \in \Delta^{\mathcal{I}} | \ \exists y, \ R(x, y) \in R^{\mathcal{I}} \land y \in C^{\mathcal{I}}\}$$

exemple

- $\exists aEnfant.Homme$

Les logiques de description de la famille $\mathcal{AL}$

Constructeur de négation sans restriction $\mathcal{C}$

négation de concept $\mathcal{C}$

syntaxe

$$\neg C$$

sémantique

$$(\neg C)^{\mathcal{I}} = \Delta^{\mathcal{I}} \setminus C^{\mathcal{I}}$$

exemples

- $\neg \exists aEnfant.\top$
- $\neg \exists aEnfant.Homme$

Les logiques de description de la famille $\mathcal{AL}$

$\mathcal{AL}$ + Constructeurs $\mathcal{U}$, $\mathcal{C}$

propriétés

- $\bot \equiv C \sqcap \neg C$
- $\top \equiv C \sqcup \neg C$
- $C \sqcup D \equiv \neg(\neg C \sqcap \neg D)$
- $\neg(C \sqcup D) \equiv (\neg C \sqcap \neg D)$
- $\neg(C \sqcap D) \equiv (\neg C \sqcup \neg D)$
- $\neg\neg C \equiv C$

Les logiques de description de la famille $\mathcal{AL}$

$\mathcal{AL}$ + Constructeurs $\mathcal{E}$, $\mathcal{C}$

propriétés

- $\exists R \equiv \exists R.\top$
- $\exists R.C \equiv \neg(\forall R.\neg C)$
- $\neg\exists R.C \equiv \forall R.\neg C$
- $\neg\forall R.C \equiv \exists R.\neg C$

exemple

- $\neg\exists aEnfant.Homme \equiv \forall aEnfant.\neg Homme$

Les logiques de description de la famille $\mathcal{AL}$

$\mathcal{AL}$ + Constructeur $\mathcal{C}$: logique de description $\mathcal{ALC}$

propriétés

disjonction :

- $C \sqcup D \equiv \neg(\neg C \sqcap \neg D)$

quantification existentielle complète :

- $\exists R.C \equiv \neg(\forall R.\neg C)$

exemples

- $\exists aEnfant.Femme \equiv \neg(\forall aEnfant.\neg Femme)$

Les logiques de description de la famille $\mathcal{AL}$

Constructeur de restriction de cardinalité $\mathcal{N}$

syntaxe

- $\leq\ nR$: au plus n dans le co-domaine de R
- $\geq\ nR$: au moins n dans le co-domaine du R

sémantique

- $(\leq\ nR)^{\mathcal{I}} = \{x \in \Delta^{\mathcal{I}}, |y,\ R(x,y) \in R^{\mathcal{I}}| \leq n\}$
- $(\geq\ nR)^{\mathcal{I}} = \{x \in \Delta^{\mathcal{I}}, |y,\ R(x,y) \in R^{\mathcal{I}}| \geq n\}$

Les logiques de description de la famille $\mathcal{AL}$

Constructeur de restriction de cardinalité $\mathcal{N}$

exemples

- $Homme \sqcap \geq 2 aEnfant$
- $Homme \sqcap \leq 2 aEnfant$
- $Homme \sqcap \leq 2 aEnfant \sqcap \geq 2 aEnfant$

Les logiques de description de la famille $\mathcal{AL}$

Constructeur de restriction de cardinalité qualifiée $\mathcal{Q}$

syntaxe

- $\leq nR.C$: au plus n éléments de C dans le co-domaine de R
- $\geq nR.C$: au moins n éléments de C dans le co-domaine de R

sémantique

- $(\leq nR.C)^{\mathcal{I}} = \{x \in \Delta^{\mathcal{I}}, |y, R(x,y) \in R^{\mathcal{I}} \wedge y \in C^{\mathcal{I}}| \leq n\}$
- $(\geq nR.C)^{\mathcal{I}} = \{x \in \Delta^{\mathcal{I}}, |y, R(x,y) \in R^{\mathcal{I}} \wedge y \in C^{\mathcal{I}}| \geq n\}$

Les logiques de description de la famille $\mathcal{AL}$

Constructeur de restriction de cardinalité qualifiée $\mathcal{Q}$

exemples

- $Homme \sqcap \geq 2 aEnfant.Femme$
- $Homme \sqcap \leq 2 aEnfant.Femme$
- $Homme \sqcap \leq 2 aEnfant.Femme \sqcap \geq 2 aEnfant.Femme$

Les logiques de description de la famille $\mathcal{AL}$

Constructeur de restriction de cardinalité qualifiée $\mathcal{Q}$

exemples

- $Pere \equiv Homme \sqcap \geq 1 aEnfant$
- $PereHeureux \equiv Homme \sqcap \geq 2 aEnfant \sqcap \geq 1 aEnfant.Femme \sqcap \geq 1 aEnfant.Homme$

Les logiques de description de la famille $\mathcal{AL}$

Constructeur d'énumération $\mathcal{O}$

syntaxe

si $a_1, a_2, \cdots, a_n$ sont des individus alors $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ est un concept

sémantique

$$\{a_1, \cdots, a_n\}^{\mathcal{I}} = \{a_1^{\mathcal{I}}, \cdots, a_n^{\mathcal{I}}\}$$

exemple :
$PACA \equiv$
$\{DPT\_84, DPT\_13, DPT\_04, DPT\_05, DPT\_83, DPT\_06\}$

Les logiques de description de la famille $\mathcal{AL}$

Constructeur

individus reliés à un individu spécifique par une relation R

syntaxe

$$R : a$$

sémantique

$$(R : a)^{\mathcal{I}} = \{d \in \Delta | (d, a^{\mathcal{I}}) \in R^{\mathcal{I}}\}$$

exemple :

$citoyenFrancais \equiv lieuNaissance : France \sqcup naturalisePar : France$

Les logiques de description de la famille $\mathcal{AL}$

Constructeur d'inversion $\mathcal{I}$

syntaxe

$$R^-$$

sémantique

$$(R^-)^{\mathcal{I}} = \{(y,x)|,(x,y) \in R^{\mathcal{I}}\}$$

exemples

- $estComposede \equiv compose^-$
- $estRegarde \equiv regarde^-$

Les logiques de description de la famille $\mathcal{AL}$

Constructeur de fonctions $\mathcal{F}$

rôle R comme une fonction

sémantique

si $(x, y) \in R^{\mathcal{I}}$ et $(x, z) \in R^{\mathcal{I}}$ alors $y = z$

exemple

- $HommeMarie \equiv Homme \sqcap \exists marieAvec.\top$

Les logiques de description de la famille $\mathcal{AL}$

Constructeur de fonctions $\mathcal{F}$

propriétés

- $\geq 1R \equiv \exists R.\top$
- $\geq 0R \equiv \top$
- $\leq 0R \equiv \forall R.\bot$

exemple

- $T \sqsubseteq \leq 1 marieAvec$
- $HommeMarie \equiv Homme \sqcap \exists marieAvec.\top \sqcap \leq 1 marieAvec$

Les logiques de description de la famille $\mathcal{AL}$

transitivité des rôles

R est transitif

sémantique

si $(x, y) \in R^{\mathcal{I}}$ et $(y, z) \in R^{\mathcal{I}}$ alors $(x, z) \in R^{\mathcal{I}}$

exemples

- $A \sqcap \exists estComposede.(B \sqcap estComposede.C)$ est subsumé par $A \sqcap estComposede.C$

Les logiques de description de la famille $\mathcal{AL}$

Hiérarchie des rôles $\mathcal{H}$

si R et S sont des rôles alors $R \sqsubseteq S$ est un axiome

sémantique

$\mathcal{I}$ satisfait $R \sqsubseteq S$ ssi $R^{\mathcal{I}} \subseteq S^{\mathcal{I}}$

exemple

- $composant\_de \sqsubseteq partie\_de$
- $parent\_de \sqsubseteq ancetre\_de$

Les logiques de description de la famille $\mathcal{AL}$

La famille des logiques de description selon leur expressivité

- $\mathcal{AL}$: base
- $\mathcal{ALC}$: plus expressive
- $\mathcal{ALC} + \mathcal{H}$ + transitivité des rôles : logique $\mathcal{SH}$
- $\mathcal{SH} + \mathcal{I} + \mathcal{F}$: logique $\mathcal{SHIF}$ (base de OWL-Lite)
- $\mathcal{SH} + \mathcal{I} + \mathcal{Q}$: logique $\mathcal{SHIQ}$
- $\mathcal{SH} + \mathcal{O} + \mathcal{I} + \mathcal{N}$: logique $\mathcal{SHOIN}$ (base de OWL-DL)

Les logiques de description de la famille $\mathcal{AL}$

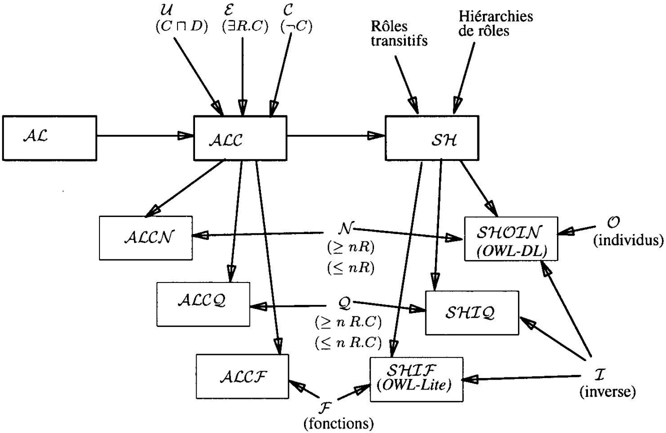


Figure: source : M. Gagnon

Les logiques de description de la famille $\mathcal{AL}$

Exercice ; définition des concepts :

- équipe : ensemble de personnes qui compte au moins 2 membres
- petite équipe : équipe qui compte au plus 5 membres
- équipe moderne : équipe qui compte au plus 4 membres, au moins un chef et dont tous les chefs sont des femmes

- concepts primitifs ?
- rôles ?
- hiérarchies de concepts et de rôles ?
- constructeurs de la famille $\mathcal{AL}$ à utiliser ?
- définition des concepts dans la logique de description adéquate ?

Les logiques de description de la famille $\mathcal{AL}$

Exercice ; définition des concepts :

- équipe : ensemble de personnes qui compte au moins 2 membres
- petite équipe : équipe qui compte au plus 5 membres
- équipe moderne : équipe qui compte au plus 4 membres, au moins un chef et dont tous les chefs sont des femmes

- concepts et rôles primitifs : $Personne, Ensemble, Femme, estMembre, estChef$
- hiérarchies de concepts et de rôles :

$$Personne \sqsubseteq \top, Ensemble \sqsubseteq \top, Femme \sqsubseteq \top, estMembre \sqsubseteq \top, estChef \sqsubseteq \top$$

- définition des concepts :

$$Equipe \equiv Ensemble \sqcap \forall estMembre.Personne \sqcap \geq 2 estMembre$$

$$PetiteEquipe \equiv Equipe \sqcap \leq 5 estMembre$$

$$PetiteModernee \equiv Equipe \sqcap \leq 4 estMembre \sqcap \geq 1 estChef \sqcap \forall estChef.Femme$$

Les logiques de description de la famille $\mathcal{AL}$

Base de connnaissances

- TBox : Terminologie
  - connaissance générique : ontologie
  - $O = \{C, R, H^C, rel, A\}$
- Abox : Assertions
  - description du monde : ensemble de faits
  - ensemble d'instances
- $BC = \{O, I, inst, instr\}$
- $BC = TBoX \cup ABox$

Raisonnement

Raisonnement sur les TBox

- satisfaisabilité
- subsomption
- équivalence
- exclusion mutuelle

Raisonnement

Raisonnement sur les *TBox* : satisfaisabilité

- Un concept est satisfaisable par rapport $\mathcal{T}$ ssi il existe $\mathcal{I}$ un modèle de $\mathcal{T}$ tel que $C^{\mathcal{I}} \neq \emptyset$
- si il existe $\mathcal{I}$ un modèle de $\mathcal{T}$ tel que $C^{\mathcal{I}} \neq \emptyset$ alors $\mathcal{I}$ est un modèle de C
- Un concept est insatisfaisable par rapport $\mathcal{T}$ ssi pour tout $\mathcal{I}$ un modèle de $\mathcal{T}$ on a $C^{\mathcal{I}} = \emptyset$

exemples

- satisfaisabilité : $Homme \sqcap \neg Homme?$
- modèle de $\mathcal{T}$: $\Delta\{a, b, c\}$, $Homme^{\mathcal{I}} = \{a, b\}$, $aEnfant^{\mathcal{I}} = \{(a, b), (a, c)\}$
  satisfaisabilité : $Homme$?, $Femme$?, $aEnfant$?

Raisonnement

Raisonnement sur les TBox : subsomption

- Un concept C est subsumé par D par rapport à T ssi pour tout $\mathcal{I}$ modèle de $\mathcal{T}$ on a $C^{\mathcal{I}} \subseteq D^{\mathcal{I}}$
- on écrit : $\mathcal{T} \models C \sqsubseteq D$

exemples

- axiome de $\mathcal{T}$: $Mere \equiv Femme \sqcap \exists aEnfant.Personne$
  subsomption : $Mere \sqsubseteq Femme?$

Raisonnement

Raisonnement sur les TBox : équivalence

- Deux concepts C et D sont équivalents par rapport à T ssi pour tout $\mathcal{I}$ modèle de $\mathcal{T}$ on a $C^{\mathcal{I}} = D^{\mathcal{I}}$
- on écrit : $\mathcal{T} \models C \equiv D$

exemples

- équivalence : $Pere \equiv Homme \sqcap \exists aEnfant.Personne$?
- équivalence : $Humain \equiv Homme \sqcup Femme$?

Raisonnement

Raisonnement sur les TBox : exclusion mutuelle

- Deux concepts C et D sont disjoints par rapport à T ssi pour tout $\mathcal{I}$ modèle de $\mathcal{T}$ on a $C^{\mathcal{I}} \cap D^{\mathcal{I}} = \emptyset$
- on écrit : $\mathcal{T} \models C \sqcap D \sqsubseteq \bot$

exemples

- disjoints : *Pere* et *Mere* ?
- disjoints : *Celibataire* et *Pere* ?

Raisonnement

Raisonnement sur les TBox : réduction à l'insatisfaisabilité

- Le concepts C est subsumé par le concept D par rapport à T ssi $C \sqcap \neg D$ est insatisfaisable
- Deux concepts C et D sont éqivalents par rapport à T ssi $C \sqcap \neg D$ et $\neg C \sqcap D$ sont insatisfaisableest insatisfaisables
- Deux concepts C et D sont disjoints par rapport à T ssi $C \sqcap D$ est insatisfaisable

Raisonnement

Raisonnement sur les TBox : élimination de la TBox

- procédure de preuve : utilisation de formules indépendantes de toute terminologie
- remplacer tous les termes de la formule par leur définition dans la terminologie

- exemple : $TBox$: $Femme \equiv Personne \sqcap Feminin$, $Homme \equiv Personne \sqcap \neg Femme$
- démontrer l'insatisfaisabilité de : $Femme \sqcap Homme$?

1) $Femme \sqcap Homme$

2) $Personne \sqcap Feminin \sqcap Personne \sqcap \neg Femme$

3) $Personne \sqcap Feminin \sqcap Personne \sqcap \neg(Personne \sqcap Feminin)$

Raisonnement

Raisonnement sur les ABox

- cohérence (consistency)
- validation d'instances (instance checking)

Raisonnement

Raisonnement sur les ABox : cohérence

- $\mathcal{A}$ une *ABox* est cohérente par rapport à $\mathcal{T}$ ssi il existe $\mathcal{I}$ un modèle de $\mathcal{T}$ qui satisfait $\mathcal{A}$

exemple

- *TBox* : $Femme \equiv Personne \sqcap Feminin$, $Homme \equiv Personne \sqcap \neg Femme$
- *ABox* : $\mathcal{A} = \{Homme(anne), Femme(anne)\}$
- cohérence de $\mathcal{A}$?

Raisonnement

Raisonnement sur les ABox : validation d'instances

- $\mathcal{A} \models C(a)$ ssi toute interprétation $\mathcal{I}$ qui satisfait $\mathcal{A}$ satisfait aussi $C(a)$
- $\mathcal{A} \models C(a)$ ssi $\mathcal{A} \cup \neg C(a)$ est incohérent

exemple

- $TBox$: $Femme \equiv Personne \sqcap Feminin$
- $ABox$: $\mathcal{A} = \{Femme(anne)\}$
- $\mathcal{A} \models Feminin(anne)$?
- $\mathcal{A} \cup \neg Feminin(anne)$ incohérent ?

Raisonnement : Monde fermé, Monde ouvert

hypothèse du monde fermé (clos)

- limitation à ce qui est énonçé

- exemple : $ABox$: $aEnfant(anne, paul)$
- $anne$ a un seul enfant c'est $paul$

Logiques de Description : hypothèse du monde ouvert

- monde ouvert: pas de limitation à ce qui est énonçé

- exemple : $ABox$: $aEnfant(anne, paul)$
- rien n'exclut que $anne$ ait d'autres enfants que $paul$
- spécifier que $anne$ a un seul enfant : $(\leq 1 aEnfant)(anne)$

Raisonnement

Inférence par méthode des tableaux

- prouver $C \sqsubseteq D$
- $C \sqsubseteq D$ ssi $C \sqcap \neg D$ est insatisfaisable

un exemple introductif

- prouver $\exists possede.(Livre \sqcap Antiquite) \sqsubseteq (\exists possede.Livre \sqcap \exists possede.Antiquite)$
- démontrer l'insatisfaisabilité de : $\exists possede.(Livre \sqcap Antiquite) \sqcap \neg(\exists possede.Livre \sqcap \exists possede.Antiquite)$

Raisonnement : Méthode des tableaux

Méthode des tableaux

Pour prouver F : construction d'un arbre dont

- la racine est étiquetée par $\neg F$
- les noeuds sont étiquetés par des concepts
- les successeurs des noeuds sont produits par des règles d'expansion.
- on ajoute $\square$ à la fin d'un chemin $\mathcal{A}$ si :
  - $C(x) \in \mathcal{A}$ et $\neg C(x) \in \mathcal{A}$
  - $C(x) \in \mathcal{A}$ et $\neg C(x) \in \mathcal{A}$ et $(x = y$ ou $y = x)$
  - $\perp(x) \in \mathcal{A}$

Il existe plusieurs règles d'expansion pour construire les chemins

Raisonnement : Méthode des tableaux

$\mathcal{A}$: chemin

Règles pour la logique de description $\mathcal{ALCN}$

règle-$\sqcap$

condition :

$\mathcal{A}$ contient $(C_1 \sqcap C_2)(x)$ et ne contient pas déja $C_1(x)$ et $C_2(x)$

action :

prolongation : $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cup \{C_1(x), C_2(x)\}$

Raisonnement : Méthode des tableaux

$\mathcal{A}$: chemin

Règles pour la logique de description $\mathcal{ALCN}$

règle-$\sqcup$

condition :

$\mathcal{A}$ contient $(C_1 \sqcup C_2)(x)$ et ne contient aucun des $C_1(x)$ et $C_2(x)$

action :

branchement : $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cup \{C_1(x)\}$ et $\mathcal{A}'' = \mathcal{A} \cup \{C_2(x)\}$

Raisonnement : Méthode des tableaux

$\mathcal{A}$: chemin

Règles pour la logique de description $\mathcal{ALCN}$

règle-$\exists$

condition :

$\mathcal{A}$ contient $(\exists R.C)(x)$ et il n'exixte aucun individu z tel que $R(x, z)$ et $C(z)$ sont aussi dans $\mathcal{A}$

action :

$\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cup \{R(x, y), C(y)\}$ où y est un nom d'individu qui n'existe pas déjà dans $\mathcal{A}$

Raisonnement : Méthode des tableaux

$\mathcal{A}$: chemin

Règles pour la logique de description $\mathcal{ALCN}$

règle-$\forall$

condition :

$\mathcal{A}$ contient $(\forall R.C)(x)$ et $R(x, y)$ mais ne contient pas $C(y)$

action :

$$\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cup \{C(y)\}$$

Raisonnement : Méthode des tableaux

$\mathcal{A}$: chemin

Règles pour la logique de description $\mathcal{ALCN}$

règle-$\geq n$

condition :

$\mathcal{A}$ contient $(\geq n\, R.C)(x)$ et il n'y a pas dans $\mathcal{A}$ des individus $z_1, \cdots, z_n$ qui sont tous distincts et qui sont tels que $\mathcal{A}$ contient $R(x, z_i)$ pour tous les individus $(1 \leq i \leq n)$

action :

$$\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cup \{R(x, y_i) \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_i \neq y_j \mid 1 \leq i < j \leq n\}$$

Raisonnement : Méthode des tableaux

$\mathcal{A}$: chemin

Règles pour la logique de description $\mathcal{ALCN}$

règle-$\leq n$

condition :

$\mathcal{A}$ contient $(\leq n\, R.C)(x)$ et les énoncés $R(x, y_1), \cdots R(x, y_{n+1})$. Il n'existe aucune identité $y_i = y_j$ dans $\mathcal{A}$ pour $(1 \leq i \leq n+1)$, $(1 \leq j \leq n+1)$, $i \neq j$

action :

Pour chaque paire possible (y_i, y_j) d'individus parmi y_i, y_{n+1} on ajoute une nouvelle branche avec $y_i = y_j$

Raisonnement : Méthode des tableaux

Méthode des tableaux

exercice

$$TBox : Parent \equiv \exists aEnfant.\top$$

Montrer par la méthode des tableaux :

$$\geq 2aEnfant \sqsubseteq Parent$$

Raisonnement : Méthode des tableaux

Méthode des tableaux

Résultats théoriques

propriétés

- terminaison
- correction
- complétude

Raisonnement en logique de description

complexité du problème de satisfaisabilité

complexité	logique de description
PTIME	$\mathcal{AL}$, $\mathcal{ALN}$
NP-complet	$\mathcal{ALU}$, $\mathcal{ALUN}$
coNP-complet	$\mathcal{ALE}$
PSPACE-complet	$\mathcal{ALC}$, $\mathcal{ALCN}$, $\mathcal{ALCQI}$
EXP-TIME	$\mathcal{SHIQ}$, $\mathcal{SHIF}$
NEXP-TIME	$\mathcal{SHOIQ}$, $\mathcal{SHOIN}$